3.3.25

Defn Sei $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge.

1) $c \in \mathbb{R}$ ist eine obere (bzw. untere) Schranke von A falls

$\forall a \in A: a \leq c$ (bzw $c \leq a$)

2) Die Menge A heisst nach oben (unten) beschränkt falls es eine obere (untere) Schranke gibt.

3) Ein Element $m \in A$ heisst ein Maximum (Minimum) von A falls

$m \in A$ und m ein obere (untere) Schranke von A ist

Satz. Sei $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, und nach oben beschränkt. Dann $\exists$ eine kleinste obere Schranke von A

d.h es gibt $c \in \mathbb{R}$ so dass

(i) $\forall a \in A: a \leq c$

(ii) Falls $a \leq x$ $\forall a \in A$, ist $c \leq x$

(d.h c ist kleiner als jede andere obere Schranke)

$c := \operatorname{Sup} A$, Supremum von A

Analog gilt für nach unten beschränkte Menge. Dann $\exists$ eine grösste untere Schranke

$c = \operatorname{Sup} A \iff$

$\underbrace{(\forall a \in A: a \leq c)}_{c \text{ ist eine obere Schranke}} \wedge \underbrace{(\forall \varepsilon > 0: \exists a \in A: a > c - \varepsilon)}_{c \text{ ist die kleinste obere Schranke}}$

$c = \operatorname{Inf} A \iff$

$\underbrace{(\forall a \in A: a \geq c)}_{c \text{ ist eine untere Schr.}} \wedge \underbrace{(\forall \varepsilon > 0: \exists a \in A: a < c + \varepsilon)}_{c \text{ ist die Grösste untere Schranke}}$

Konvention: Falls A nach oben nicht beschränkt ist, definieren wir

$\operatorname{Sup} A := +\infty$

(Falls nach unten nicht beschränkt ist $\operatorname{Inf} A := -\infty$).

Bmk Das Supremum (Infimum) ist eine natürliche Verallgemeinerung des Maximums (Minimums) einer Menge

! Aber Max (Min) muss nicht existieren!!

(sogar für beschränkte Menge

Bsp $A = (0,1)$ $\operatorname{Sup} A = 1$, $\operatorname{Inf} A = 0$

kein Max, kein Min

Eigenschaften von Sup. und Inf.

① Seien $A \subset B \subset \mathbb{R}$ Teilmengen

- Falls B nach oben beschränkt ist, folgt $\sup A \leq \sup B$

- B nach unten beschränkt $\Rightarrow \inf B \leq \inf A$.

② Falls $\forall a \in A, \forall b \in B : a \leq b$, dann gilt $\sup A \leq \inf B$.

③ $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$

$$\sup(cA) = \begin{cases} c \sup A & \text{falls } c > 0 \\ c \inf A & \text{falls } c < 0 \end{cases}$$

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}.$$

Euklidische Raum

$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

$c \in \mathbb{R}$

$x + y := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ Addition

$cx := (cx_1, \dots, cx_n)$ skalar multiplikation.

$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ Das Skalarprodukt zweier Vektoren

$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ Die Norm des Vektors x

Eigenschaften des Skalarprodukts

- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
- $\langle x, x \rangle \geq 0$ (Gleichheit $\Leftrightarrow x = 0$)
- $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$
  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Eigenschaften der Norm

- $\|x\| \geq 0$ (Gleichheit $\Leftrightarrow x = 0$)
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
  (Δ- ungleichung)
- $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$
  Cauchy - Schwarz Ungleichung

Defn Das Kreuzprodukt

zwischen 2 vektoren in $\mathbb{R}^3$ ist definiert durch

$$\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(a, b) \longmapsto a \times b$$

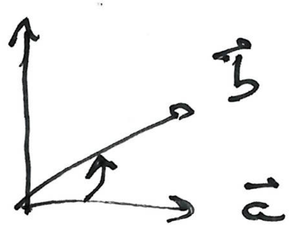
$$:= (a_2 b_3 - a_3 b_2,\; a_3 b_1 - a_1 b_3,\; a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$a = (a_1, a_2, a_3)$

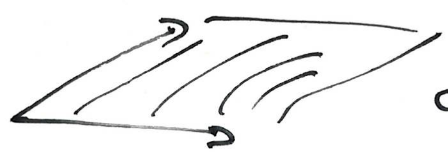
$b = (b_1, b_2, b_3)$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{e}_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2) - \vec{e}_2 (a_1 b_3 - b_1 a_3) + \vec{e}_3 (a_1 b_2 - b_1 a_2)$$

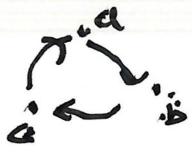


$\|\vec{a} \times \vec{b}\|$ = Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannte parallelogram.



Eigenschaften des Kreuzprodukts

1. $(a+b) \times c = a \times c + b \times c$
2. $a \times b = -b \times a$
3. $a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0.$



§1.3 Komplexe Zahlen

Um komplexe Zahlen zu definieren, definieren wir auf $\mathbb{R}^2$ folgende Multiplikation.

$$\underline{X}_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$$
$$\underline{X}_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, \; x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

Als Addition nehmen wir komp. weise Addition

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, \; y_1 + y_2)$$

$$(0,0) \cdot (x,y) = (0,0)$$
$$(1,0) \cdot (x,y) = (x,y)$$
$$(0,1) \cdot (0,1) = (-1,0)$$

Falls $(x,y) \neq (0,0)$

$$(x,y) \cdot \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right) = (1,0)$$

Satz 1.3.1 $\mathbb{R}^2$, versehen mit Addition der Vektoren und obig definierte Multiplikation ist ein Körper mit

$\mathbb{1}$ – Einselelement $= (1,0)$

und Nullelement $= (0,0)$.

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ wird der Körper der komplexe Zahlen genannt und wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet. –/4

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$x \longmapsto (x,0)$$

Insbesondee $\quad 1 \longmapsto (1,0)$

Mittels dieser Abbildung können wir $\mathbb{R}$ mit einem ~~Ein~~ Unterkörper von $\mathbb{C}$ identifizieren.

Nun sei $i := (0,1)$.

Dann besitzt jedes Element $z = (x,y) \in \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ eine eindeutige Darsellung

$$z = (x,y) = (x,0)\cdot(1,0) + (0,y)\cdot(0,1)$$
$$= x\,\mathbb{1} + y\,i$$

$$i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) \cong -1$$

$$i^2 = -1$$

$$z_1 \cdot z_2 := (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$$
$$= (x_1x_2 - y_1y_2)$$
$$+ i(y_1x_2 + y_2x_1).$$

<u>Defn</u>. $\quad z = x + yi$

1. x ist der <u>Reelle teil</u> von z genannt und ist mit $x = \mathrm{Re}(z)$ bezeichnet
2. y = <u>Imaginäre teil</u> von z

$$y = \mathrm{Im}(z)$$

(3) For $z = x + yi$ definieren wir die Konjugierte Zahl,

$$\bar{z} := x - yi$$

(4) Der Norm der z ist

$$\|z\| := \sqrt{x^2 + y^2}$$

<u>Satz</u> (i) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

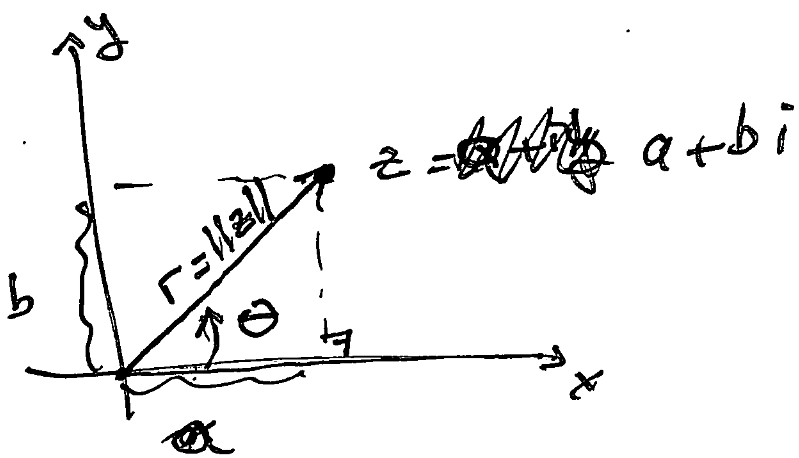
$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

(ii) $z\bar{z} = x^2 + y^2 = \|z\|^2$

$z \neq 0$, $z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{\|z\|^2}$

<u>Bmk.</u> Aus der Additionssatze für die Funktionen sinus, cosinus folgt

$$z_1 z_2 = (r_1 e^{i\theta_1})(r_2 e^{i\theta_2}) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$



$$a = r\cos\theta = \|z\|\cos\theta \qquad b = r\sin\theta = \|z\|\sin\theta$$

Also haben $z = a + bi$

$$= \|z\|\cos\theta + i\|z\|\sin\theta$$

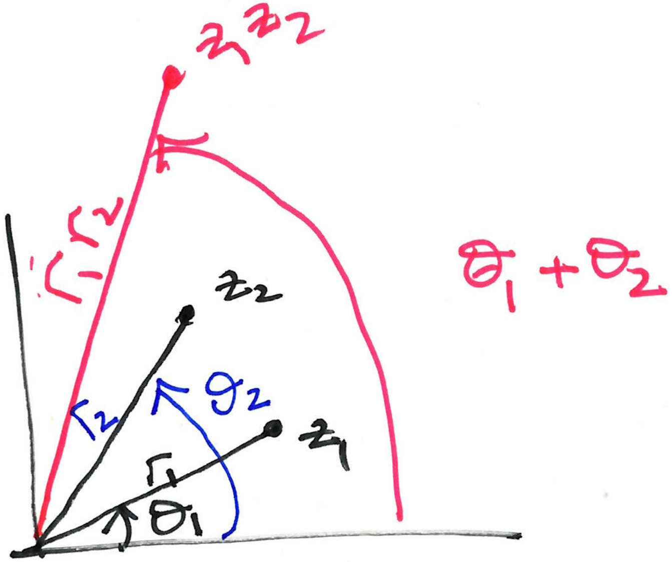
$$= \|z\| \underbrace{(\cos\theta + i\sin\theta)}_{:= e^{i\theta}}$$

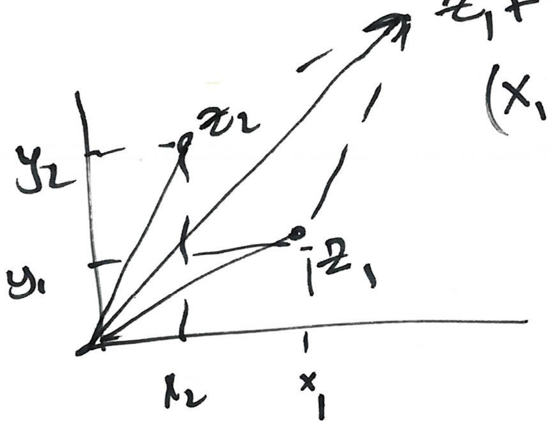
$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$

$$e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$$

$$e^{2\pi n i} = 1$$

For $z = re^{i\theta}$

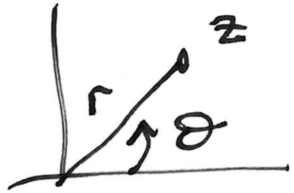




$z_1 + z_2 =$
$(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

$z = re^{i\theta}$

$z^n = r^n e^{in\theta}$



Satz Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$

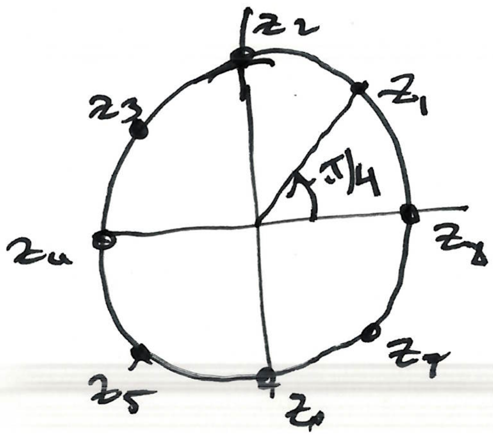
Dann hat die Gleichung $z^n = 1$

genau n Lösungen in $\mathbb{C}$

$z_1, z_2, \ldots, z_n$ $\qquad e^{i\left(\frac{2\pi}{n}\right)j}$

$$z_j = \cos\left(\left(\frac{2\pi}{n}\right)j\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n} j\right)$$

$1 \leq j \leq n$.



$z^8 = 1$

$z_1 = e^{i\left(\frac{2\pi}{8}\right)}$
$= e^{i\pi/4}$

$z^4 = 1$ hat Lösungen

$\pm 1, \ \pm i$

$$z_j = e^{i\frac{2\pi}{4}j} \qquad j = 1, 2, 3, 4.$$

$$z_1 = e^{\frac{2\pi}{4}i} = e^{\pi/2\, i}$$

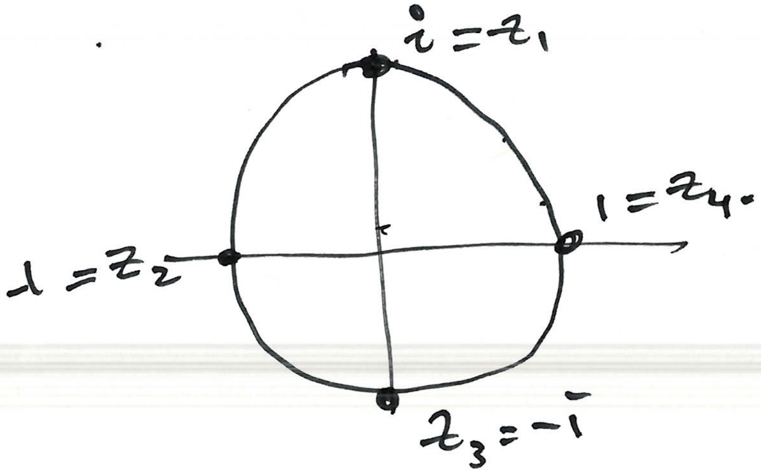
$$= \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

$$= i$$

$$z_2 = e^{i\frac{2\pi}{4}\cdot 2} = e^{i\pi} = -1$$

$$z_3 = e^{i\frac{2\pi}{4}\cdot 3} = e^{\frac{3\pi i}{2}} = -i$$

$$z_4 = e^{i\frac{2\pi}{4}\cdot 4} = e^{2\pi i} = 1$$



Satz (Fundamentalsatz der Algebra)

Sei $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$$

$$a_0, a_1 \ldots a_n \in \mathbb{C}$$

Dann gibt es $z_1, z_2 \ldots z_n \in \mathbb{C}$ so dass

$$p(z) = (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n).$$

Clicker Frage

Sei S eine nichtleere, nach unten beschränkte Menge, $S \subseteq \mathbb{R}$ und sei $\beta \in \mathbb{R}$ ihr Minimum. Dann

(a) existiert $x \in S$ s.d $x < \beta + \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$

Falsch: (1) $x < \beta + \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow x \leq \beta$

Beweis. Wir nehmen an dass $x > \beta$. Dann $\exists \tilde{\varepsilon} > 0$ s.d $\beta + \tilde{\varepsilon} = x$. Aber Dann $x = \beta + \tilde{\varepsilon}$ ist nicht kleiner als $\beta + \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$ mit $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}$ $x = \beta + \tilde{\varepsilon} \not< \beta + \varepsilon$

Da $\beta = \operatorname{Inf} S$ und $x \in S$,
$x \leq \beta \Rightarrow x = \beta \in S$
d.h $\beta = \min S$.

Aber das ist nicht immer so

z.B Sei $S = (0,1)$, $\beta = 0 \notin S$.

die Aussage

$(\forall \varepsilon > 0, \exists x \in S : x < \beta + \varepsilon)$

$\not\equiv (\exists x \in S : \forall \varepsilon > 0 : x < \beta + \varepsilon)$

(b) $(\beta, \beta + 1) \cap S \neq \emptyset$

Falsch: Sei $S = \{0\} \cup (2,3)$

Dann ist $\operatorname{Inf} S = 0 = \beta$

$(\beta, \beta+1) = (0,1)$ aber $(0,1) \cap S = \emptyset$

d.h es gibt kein $a \in S$ mit $a \in (\beta, \beta+1)$

Bmk. β ist die Grösste Unter. Schrage heisst $(\forall a \in S, \beta \leq a)$ und $(\forall \varepsilon > 0, \exists a \in S : a < \beta + \varepsilon)$

Mit $\varepsilon = 1$ erhalten wir

$(\forall a \in S, \beta \leq a)$ und $(\exists a \in S : a < \beta + 1)$

d.h $\exists a \in S$, $\beta \leq a < \beta + 1$

d.h. "=" in $\beta \leq a$ $\forall a \in S$ ist wichtig!

(c) Für jedes $\varepsilon > 0$

existiert $x \in S$ s.d

$x < \beta + \varepsilon$

Richtig Nach defn

von Infimum

als die grösste

untere Schranke.

Kapitel 2

Folgen und Reihen

(Sequences and Series)

Sei M eine Menge z.B $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$

oder ein Menge der Vektoren oder Matrizen

oder Emoji

Eine Folge ist eine

Abbildung $a : \mathbb{N} \to M$

$n \to a(n)$

Wir bezeichnen das Bild

mit a_n statt $a(n)$

Bsp. (1) $2, 4, 6, \ldots$

$$a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$n \longmapsto 2n$$

$$a_n = 2n$$

(2) $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$

$$a_n = 2^n \qquad n \geq 0$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

(3) $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$

$$a_n = (-1)^n \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

(4) , $\ldots$

(5) $M = \mathbb{R}^3$

$$a_n = (n, n, n)$$
$$(1,1,1), (2,2,2), (3,3,3), \ldots$$

(6) Eine Folge von Funktionen

$$1, x, x^2, \ldots$$

$$a_n(x) := x^n \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Bmk. $\frac{n}{n-2} = a_n \qquad n \geq 3$

$$(a_n)_{n \geq 1}$$

(7) Als Input eines Algo. nehmen wir eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$

Und als Output

$$\begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ kein Primzahl ist} \\ 1 & \text{falls } n \text{ ein Primzahl ist.} \end{cases}$$

$$(a_n)_{n \geq 1} = 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, \ldots$$

Z.B.

Ein diskretes Populationsmodelle beschreibt die Population a_n zum Zeitpunkt n (mit Zeitintervallen der Länge 1) durch die rekursive Beziehung

$$a_{n+1} = a_n + \beta a_n (L - a_n)$$

Dabei β ist ein "Wachstumsfaktor" und L die Limitierende Population, d.h. die Population die Langfristig nicht überschritten wird.

$L = 1$

$\beta = 0.5, \ 1, \ 3$

In[3]:= a[n_] := a[n] = a[n-1] + a[n-1] * 0.5 * (1 - a[n-1])

In[4]:= a[1] = 0.1

$\beta = 0.5$

Out[4]= 0.1

In[5]:= Array[a, 100]

Out[5]= {0.1, 0.145, 0.206988, 0.289059, 0.391811, 0.510959, 0.635899, 0.751665, 0.844997, 0.910486, 0.951236, 0.974429, 0.986888, 0.993358, 0.996657, 0.998323, 0.99916, 0.99958, 0.99979, 0.999895, 0.999947, 0.999974, 0.999987, 0.999993, 0.999997, 0.999998, 0.999999, 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1.}

■

In[7]:= b[n_] := b[n] = b[n-1] + b[n-1] * 1 * (1 - b[n-1])
b[1] = 0.1

$\beta = 1$

Out[8]= 0.1

In[9]:= Array[b, 100]

Out[9]= {0.1, 0.19, 0.3439, 0.569533, 0.814698, 0.965663, 0.998821, 0.999999, 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1.}

In[10]:= c[n_] := c[n] = c[n-1] + c[n-1] * 3 * (1 - c[n-1])
c[1] = 0.1

$\beta = 3$

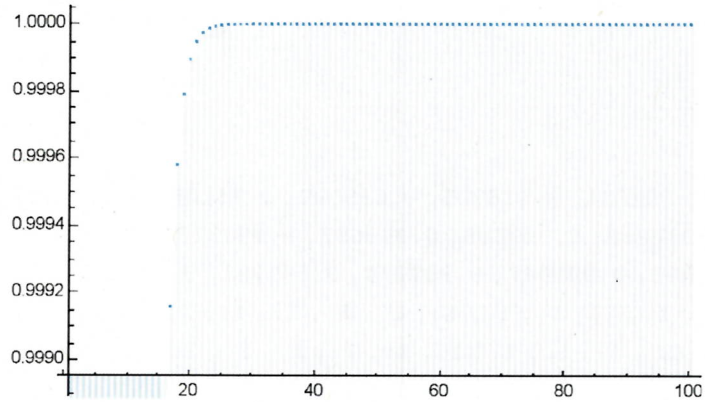
Out[11]= 0.1

In[12]:= Array[c, 100]

Out[12]= {0.1, 0.37, 1.0693, 0.846993, 1.23578, 0.36166, 1.05425, 0.882681, 1.19335, 0.501158, 1.25115, 0.308456, 0.948389, 1.09523, 0.782331, 1.2932, 0.155706, 0.550092, 1.29256, 0.15809, 0.557382, 1.2975, 0.139466, 0.499512, 1.24951, 0.31421, 0.960657, 1.07404, 0.835467, 1.24785, 0.320003, 0.972806, 1.05217, 0.887498, 1.18703, 0.520986, 1.26966, 0.242514, 0.793618, 1.28498, 0.186386, 0.641326, 1.33141, 0.00769453, 0.0306005, 0.119593, 0.435464, 1.17297, 0.564306, 1.3019, 0.122768, 0.445855, 1.18706, 0.520906, 1.26959, 0.242768, 0.794262, 1.28449, 0.18821, 0.646571, 1.33212, 0.00484139, 0.0192953, 0.0760641, 0.286899, 0.900663, 1.16907, 0.576107, 1.30873, 0.0965976, 0.358397, 1.04824, 0.896532, 1.17482, 0.558677, 1.29835, 0.136268, 0.489366, 1.23903, 0.350546, 1.03354, 0.929552, 1.12601, 0.700351, 1.32993, 0.0135812, 0.0537716, 0.206412, 0.697831, 1.33042, 0.0116291, 0.0461108, 0.178065, 0.617137, 1.32597, 0.0292754, 0.114531, 0.41877, 1.14898, 0.635468}

In[13]:= `DiscretePlot[a[n], {n, 1, 100}]`

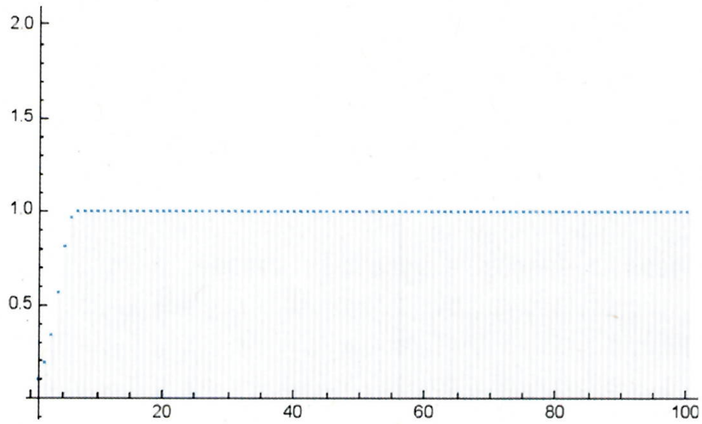
Out[13]=



$\beta = 0.5$

In[14]:= `DiscretePlot[b[n], {n, 1, 100}]`

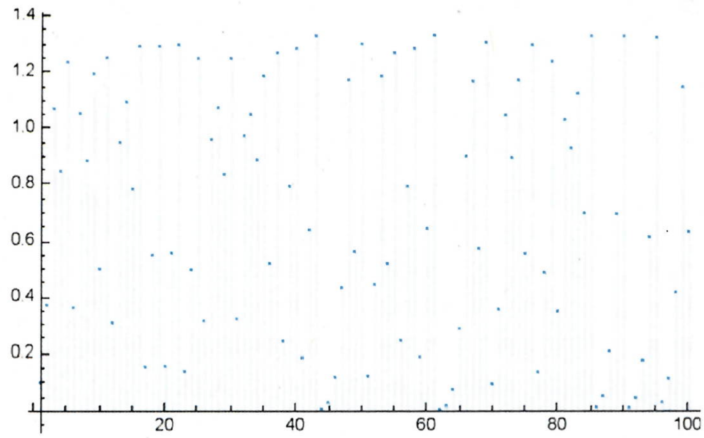
Out[14]=



$\beta = 1$

In[17]:= `DiscretePlot[c[n], {n, 1, 100}]`

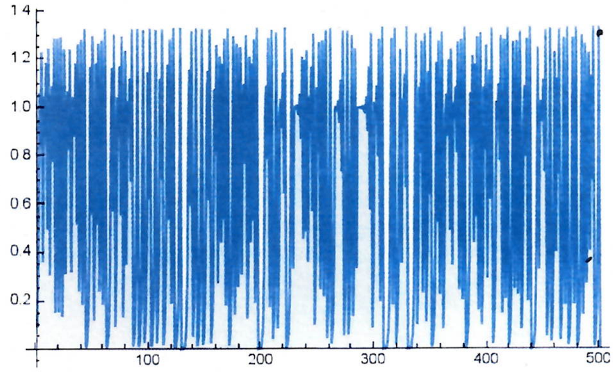
Out[17]=



$\beta = 3$

In[32]:= `DiscretePlot[c[n], {n, 1, 500}]`

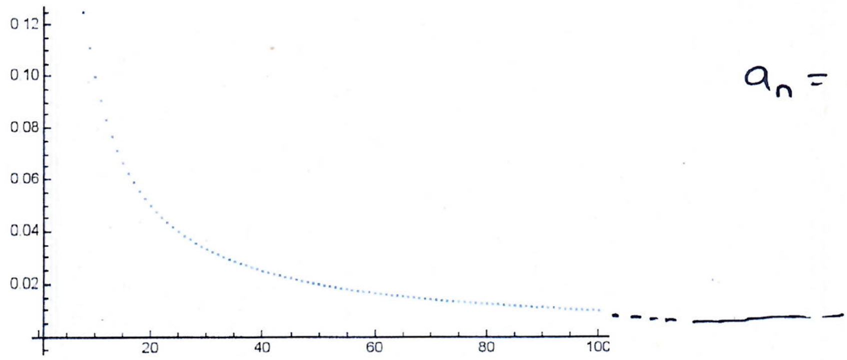
Out[32]=



$$a_{n+1} = a_n + 3a_n(1 - a_n)$$

In[67]:= `DiscretePlot[1 / n, {n, 1, 100}]`

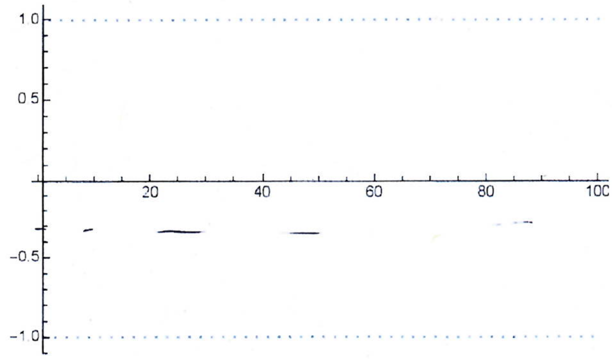
Out[67]=



$$a_n = \frac{1}{n}$$

In[68]:= `DiscretePlot[(-1) ^n, {n, 1, 100}]`

Out[68]=



$$a_n = (-1)^n$$